Compito scritto dell'esame di Statistica e analisi dei dati 20 settembre 2021	Prof. Giuseppe Boccignone	Corso di Laurea
Cognome:	Nome:	Matricola:

Istruzioni

- Il tempo riservato alla prova scritta e' di 2 ore. Durante la prova e' possibile consultare il formulario ed utilizzare la calcolatrice. Non e' possibile consultare libri e appunti.
- Ogni foglio deve riportare il numero di matricola
- In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente
- Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede piu' passaggi di calcolo, non sara' preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o piu' frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si svolgano i calcoli mantenendo tali numeri in forma frazionaria fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sara' eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).

Problemi

Esercizio 1.
Si supponga di avere un mazzo di 40 carte di cui 30 blu e 10 rosse. Si estrae una carta: se esce carta blu si lancia una moneta altrimenti un dado regolare.

(a) Con quale probabilitá esce testa?

Soluzione:
Definiamo i seguenti eventi

- $B =$ "esce carta blu"
- $T =$ "esce testa nel lancio della moneta"
- $D_i =$ "esce faccia i nel lancio del dado" , $i = 1, 2, \cdots, 6$
- $E =$ "esce testa nel gioco"

Osserviamo che

$$E = B \cap T$$

Allora:

$$P(E) = P(B \cap T) = P(T \mid B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{40} = \frac{3}{8}$$

(b) Con quale probabilitá esce il numero 6?

Soluzione:
Definiamo l'evento $F =$ "esce numero 6 nel gioco"
In modo analogo al caso precedente, $F = D_6 \cap \sim B$, dunque:

$$P(F) = P(D_6 \mid \sim B)P(\sim B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{24}$$

Esercizio 2. Un gruppo di bagnanti é costituito per il 65% da persone di carnagione scura (S) e le altre sono di carnagione chiara (C). L'uso inappropriato di creme solari fa sí che si abbia una percentuale di persone ustionate dal sole (U) del 10% se di carnagione scura e del 60% se di carnagione chiara

(a) Sapendo che un bagnante a caso si é ustionato prendendo il sole, con che probabilitá ha carnagione chiara?

Soluzione: (Teorema di Bayes)
I dati del problema ci dicono che

$$P(S) = 0.65$$

$$P(C) = 1 - P(S) = 0.35$$

$$P(U \mid S) = 0.1$$

$$P(U \mid C) = 0.6$$

Vogliamo calcolare $P(C \mid U)$.
Usando Bayes:

$$P(C \mid U) = \frac{P(U \mid C)P(C)}{P(U \mid C)P(C) + P(U \mid S)P(S)} = 0.76. \tag{1}$$

Esercizio 3.

Si effettuano 600 lanci di un dado non truccato.

(a) Calcolare un valore approssimato della probabilitá che il "5" esca un numero di volte compreso tra 94 e 106

Soluzione: (Distribuzione binomiale in approssimazione normale) In ogni lancio la probabilitá che esca il 5 vale $p = 1/6$ (equiprobabilitá di 6 eventi). Poiché $n = 600$ é sufficientemente grande, approssimiamo con una Gaussiana $\mathcal{N}(x \mid \mu = np, \sigma^2 = npq)$ dove

$$\mu = np = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 9.1287$$

Procediamo alla standardizzazione

$$z_1 = \frac{94 - 100}{9.1287} = -0.657$$

$$z_2 = \frac{106 - 100}{9.1287} = 0.657$$

Quindi usando le tabelle della normale ridotta

$$P(94 \leq X \leq 100) = F_Z(0.657) - F_Z(-0.657) = 2F_Z(0.657) - 1 \approx 0.49$$

Esercizio 4.

La quantitá di stoffa per produrre poltrone segue una legge normale. Su un campione casuale di 15 poltrone, si é riscontrato che l'ammontare medio del materiale é $912cm^2$, con una deviazione standard di $64cm^2$.

(a) Qual é l'intervallo di confidenza al 99% per la media della quantitá di materiale?

Soluzione:

Sappiamo che $n = 15, \bar{x} = 912cm^2, s = 64cm^2$. Il campione di taglia $n = 15$ é piccolo e l'intervallo é basato sulla t di Student con $\nu = n - 1 = 14$ gradi di libertá.

Con $\alpha = 0.01$, si ricava dalla tabella della t che il quantile é $t_\alpha = t_{.005} = 2.977$.

L'errore standard é $SE = \frac{\bar{x}}{\sqrt{n}} = \frac{912}{\sqrt{15}} = 16.52473$

L' intervallo di confidenza al 99% per la media é dunque

$$\bar{x} - 2.977 \cdot SE < \mu < \bar{x} + 2.977 \cdot SE,$$

ovvero

$$\mu = 912 \pm 49.2cm^2$$

Esercizio 5.

La misura X del numero di ottani di una benzina ha una deviazione standard di 0.5.

(a) Quante misure indipendenti devono essere fatte per conoscere il numero medio di ottani con un errore massimo di 0.3 e una confidenza del 90%?

Soluzione:

Assumiamo una popolazione normale (media μ incognita e $\sigma = 0.5$ nota) e scriviamo l' IC (bilaterale) per la media μ con confidenza del 90%:

$$\mu = \bar{X} \pm \frac{0.5}{\sqrt{n}} z_{0.95}$$

L'errore richiesto é il semi intervallo $z_{\alpha/2}\dot{S}E.$, con errore standard di $\bar{X}$ $SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, che deve essere al massimo pari a 0.3, dunque

$$e = \frac{0.5}{\sqrt{n}} z_{0.95} \leq 0.3$$

da cui

$$n \geq \frac{0.25}{0.09} z_{0.95}^2 \simeq 7.5$$

Esercizio 6.

Da due popolazioni normalmente distribuite vengono estratti due campioni di taglia 9 e 12. Le varianze campionarie sono 20 e 8.

(a) E' plausibile assumere che le varianze delle popolazioni non siano statisticamente differenti, al livello di significativitá 0.05?

Soluzione:
I dati del problema ci dicono che: $n_1 = 9$, $n_2 = 12$, $s_1^2 = 20$, $s_2^2 = 8$.
L'IC per il rapporto delle due varianze, con $\alpha = 0.05$ é:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{f_{0.025}(\nu_1, \nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} f_{0.025}(\nu_2, \nu_1)$$

con $\nu_1 = 8, \nu_2 = 11$, $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 2.5$ $f_{0.025}(8, 11) = 3.66$, $f_{0.025}(11, 8) \simeq 4.25$

$$2.5 \cdot 0.27 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2.5 \cdot 4.25$$

$$0.68 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 10.6$$

L'intervallo ammette la possibilitá che $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$, dunque é l'ipotesi è plausibile