Compito scritto dell'esame di Statistica e analisi dei dati 15 giugno 2021	Prof. Giuseppe Boccignone	Firma leggibile dello studente
Cognome:	Nome:	Matricola:

Istruzioni

- Il tempo riservato alla prova scritta e' di 2 ore. Durante la prova e' possibile consultare il formulario ed utilizzare la calcolatrice. Non e' possibile consultare libri e appunti.
- Ogni foglio deve riportare il numero di matricola
- In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente
- Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede piu' passaggi di calcolo, non sara' preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o piu' frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si svolgano i calcoli mantenendo tali numeri in forma frazionaria fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sara' eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).

Problemi

Esercizio 1. Da uno scaffale che contiene 5 romanzi, 3 libri di poesie e 1 dizionario vengono scelti a caso 3 libri

(a) Qual è la probabilità di selezionare 1 dizionario?

Soluzione: Ci sono

$$\#(possibili) = C_{9,3} = \binom{9}{3} = 84$$

modi equiprobabili di scegliere 3 libri su 9.
Il numero di modi favorevoli è il numero di modi in cui 1 dei dizionari e 2 non-dizionari possono essere selezionati:

$$\#(favorevoli) = C_{1,1} \cdot C_{8,2} = \binom{1}{1}\binom{8}{2} = 1 \cdot 28 = 28$$

Dunque:

$$\frac{\#(favorevoli)}{\#(possibili)} = \frac{28}{84} \approx 0.33$$

Esercizio 2. Una catena di negozi di vernici produce e vende solo vernice al lattice e semilucida. Sulla base delle vendite a lungo termine, la probabilità che un cliente acquisti vernice al lattice è di 0.75. Di quelli che acquistano vernice al lattice, il 60% acquista anche i rulli. Solo il 30% degli acquirenti di vernice semilucida, invece, acquistano rulli.

(a) Un acquirente selezionato a caso acquista un rullo e un barattolo di vernice. Qual è la probabilità che la vernice sia al lattice?

Soluzione:
Indicando con L l'evento "un cliente acquista vernice al lattice", si ha

$$P(L) = 0.75$$

Di conseguenza per l'evento S "un cliente acquista vernice semilucida", si ha

$$P(S) = 1 - 0.75 = 0.25$$

Definito R l'evento "il cliente acquista un rullo", si ha che

$$P(R \mid L) = 0.60, P(R \mid S) = 0.30$$

La percentuale di acquirenti di un rullo

$$P(R) = P(R \mid L)P(L) + P(R \mid S)P(S) = 0.6 \cdot 0.75 + 0.3 \cdot 0.25 = 0.525.$$

La probabilità che un acquirente di un rullo acquisti anche un barattolo di vernice al lattice è la probabilità a posteriori $P(L \mid R)$ calcolabile con la regola di Bayes:

$$P(L \mid R) = \frac{P(R \mid L)P(L)}{P(R)} = \frac{0.6 \times 0.75}{0.525} \approx 0.857. \tag{1}$$

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria con densità

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } 0 < x < 1 \\ 2 - x, & \text{per } 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare la probabilità che X assuma valori

(a) tra 0.6 e 1.2

(b) maggiori di 1.8

Soluzione: Abbiamo che

$$\begin{aligned} P(0.6 < X < 1.2) &= \int_{0.6}^{1.2} f(x)\,dx = \int_{0.6}^{1} x\,dx + \int_{1}^{1.2} (2-x)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{0.6}^{1} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{1.2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{0.36}{2} - \frac{3.36}{2} + \frac{3}{2} = 0.5 \end{aligned}$$

e

$$P(X > 1.8) = \int_{1.8}^{2} f(x)\,dx = \int_{1.8}^{2} (2-x)\,dx = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1.8}^{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02$$

Esercizio 4. Durante un esperimento di laboratorio, il numero medio di particelle radioattive che passano attraverso un contatore in 1 millisecondo è 4.

(a) Qual è la probabilità che 6 particelle entrino nel contatore in un dato millisecondo?

Soluzione: Usando la distribuzione di Poisson con $x = 6$ e $\lambda t = 4$ e facendo riferimento alle Tavole Statistiche abbiamo:

$$p(6; 4) = \frac{e^{-4}(4)^6}{6!} = \sum_{x=0}^{6} p(x; 4) - \sum_{x=0}^{5} p(x; 4) = 0.8893 - 0.7851 = 0.1042$$

Esercizio 5. Un distributore di bibite è regolato in modo che eroghi una media di 200 millilitri per bicchiere. Se la quantità di bevanda è normalmente distribuita con una deviazione standard pari a 15 millilitri.

(a) qual è la probabilità che un bicchiere conterrà più di 224 millilitri?

(b) quante tazze probabilmente traboccheranno se si usano tazze da 230 millilitri per le prossime 1000 bevande?

Soluzione:
Sia X la quantità di bevanda distribuita con $\mu = 200$ e $\sigma = 15$.
(a) $P(X > 224)$ (?)
Innanzitutto, bisogna trovare il valore z corrispondente a $x = 224$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{224 - 200}{15} = 1.6$$

Dunque

$$\begin{aligned} P(X > 224) &= P(Z > 1.6) \\ &= 1 - P(Z > 1.6) \\ &= 1 - F(1.6) \\ &= 1 - 0.9452 \\ &= 0.0548 \end{aligned}$$

(b)
Standardizziamo $x = 230$

$$z = \frac{230 - 200}{15} = 2$$

Dunque

$$P(X > 230) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - F(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

Per conoscere la quantità prevista di tazze che trabocceranno nei prossimi 1000 bicchieri, adottiamo la proprietà binomiale

$$\begin{aligned} E[X] &= n \cdot p \\ &= 1000 \cdot 0.0228 \\ &= 22.8 \approx 23 \end{aligned}$$

Esercizio 6. I punteggi di un test d'ingresso posto alle matricole di un college negli ultimi cinque anni sono distribuiti con legge normale a media $\mu = 74$ e varianza $\sigma^2 = 8$.

(a) Si può considerare ancora $\sigma^2 = 8$ un valore di varianza valido se un campione casuale di 25 studenti che eseguono il test d'ingresso quest'anno ottenesse un valore di $S^2 = 15$?

Soluzione: Se S^2 è la varianza di un campione casuale di dimensione n preso da una popolazione normale avente varianza σ^2, allora la statistica:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

ha una distribuzione chi-quadro con $v = n - 1$ gradi di libertà.
Quindi,

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{24 \cdot S^2}{8} = 3 \cdot S^2$$

ha una distribuzione chi-quadro con 24 gradi di libertà.
Verificheremo se $\sigma^2 = 8$ è un'assunzione ragionevole determinando la probabilità

$$P(S^2 > 15) = P(\chi^2 > 3 \cdot 15) = P(\chi^2 > 45) < P(\chi^2 > 42.980) \approx 0.01$$

quindi, abbiamo trovato che sotto l'ipotesi $\sigma^2 = 8$, c'è meno di 1% di possibilità che $P(S^2 > 15)$, quindi l'ipotesi non è ragionevole.